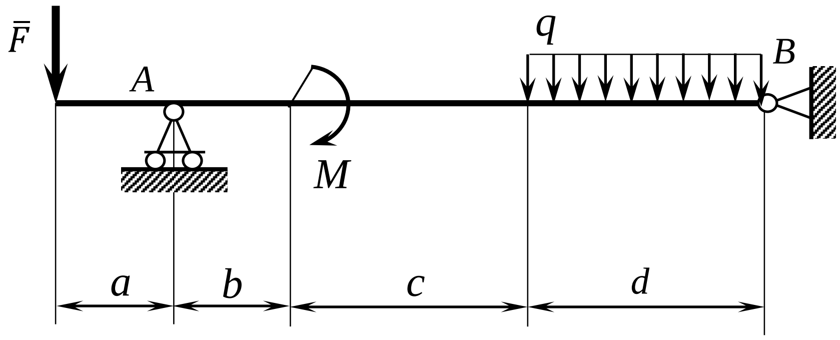
ЗАДАНИЕ 4
Изгиб двухопорной балки
Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Определение размеров поперечного сечения балки

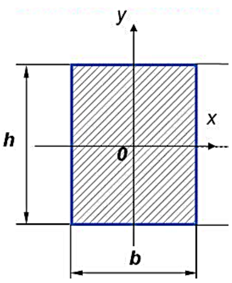
На двухопорную стальную балку прямоугольного сечения (рис.1) действует сосредоточенная сила $F = 12$ кН**,** равномерно-распределенная нагрузка $q = 16$ кН/м, изгибающий момент $M = 8$ кН · м, a =*2* м, b = *2* м, c =*4*м, d = 4 м.

Для заданной схемы балки:

- построить эпюры поперечных сил (Q) и изгибающих моментов (M), найти M_{max};
- подобрать размеры балки при допускаемом напряжении $[\sigma] = 160$ МПа.

Исходные данные приведены в таблице 1, расчетную схему составить для





Поперечное сечение балки

Рисунок 1

на рисунка 1.

Таблица 1

№ варианта	*F, кН*	*M, кН·м*	*q, кН/м*	*a, м*	*b, м*	*c, м*	*d, м*
1	8	15	3	2	5	2	3
2	10	20	5	3	6	3	2
3	12	25	7	2	4	3	3
4	6	10	6	3	4	5	3
5	8	5	5	2	2	5	5
6	10	15	4	3	3	6	5
7	11	10	3	3	2	4	6
8	13	20	5	5	3	4	4
9	8	25	7	5	2	2	4
10	9	15	6	6	3	3	2
11	7	10	5	4	3	2	3
12	10	15	4	4	5	3	6
13	12	20	3	5	5	2	4
14	14	25	5	6	6	3	4
15	8	10	7	4	4	3	2
16	7	5	6	4	4	5	3
17	6	15	5	2	2	5	2
18	5	10	4	3	3	6	3
19	8	20	3	2	2	4	2
20	10	25	5	3	3	4	3
21	12	15	7	5	2	2	3
22	6	10	6	6	3	3	3
23	8	12	5	4	3	2	3
24	10	14	4	4	5	3	5
25	11	18	3	2	5	2	5
26	13	20	5	3	6	3	6
27	8	10	7	2	4	3	4
28	9	8	6	3	4	5	4
29	7	6	5	5	2	5	2
30	10	10	4	6	3	6	5

Решение

1. Определим опорные реакции балки.

Рассмотрим равновесие балки. Составим расчетную схему. Отбрасываем связи. Действие связей заменяем реакциями $R_А$ и R_B.

Балка находится в равновесии под действием плоской системы параллельных сил

$$(\bar{R}_B, \bar{R}_A, M, \bar{Q}, \bar{F}) \sim 0$$

Для плоской системы параллельных сил, приложенных к брусу, составим два уравнения равновесия:

$$\sum M_B(F_k) = 0 \qquad F \cdot BC + q \cdot DB \cdot \frac{DB}{2} - M - R_A \cdot AB = 0$$

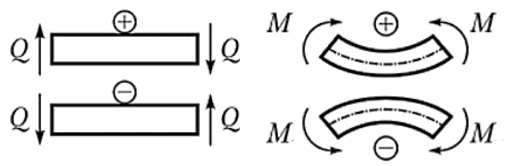
$$R_A = \frac{F \cdot BC + q \cdot DB \cdot \frac{DB}{2} - M}{AB} = \frac{12 \cdot 12 + 16 \cdot 4 \cdot 2 - 8}{10} = 26{,}4(\text{кН})$$

$$\sum F_{ky} = 0 \qquad -F - q \cdot 4 + R_A + R_B = 0$$

$$R_B = F + q \cdot 4 - R_A = 12 + 64 - 26{,}4 = 49{,}6(\text{кН})$$

Значения реакций R_A и R_B получились положительными. Это указывает на то, что принятые направления этих реакций совпадают с их действительными направлениями.

2. Разбиваем балку на отдельные участки, в пределах которых действие внешних сил приложенных к балке, постоянно. Таким образом, балка получилась разбита на три участка (рис. 2a). Принимаем правило знаков.



Правило знаков

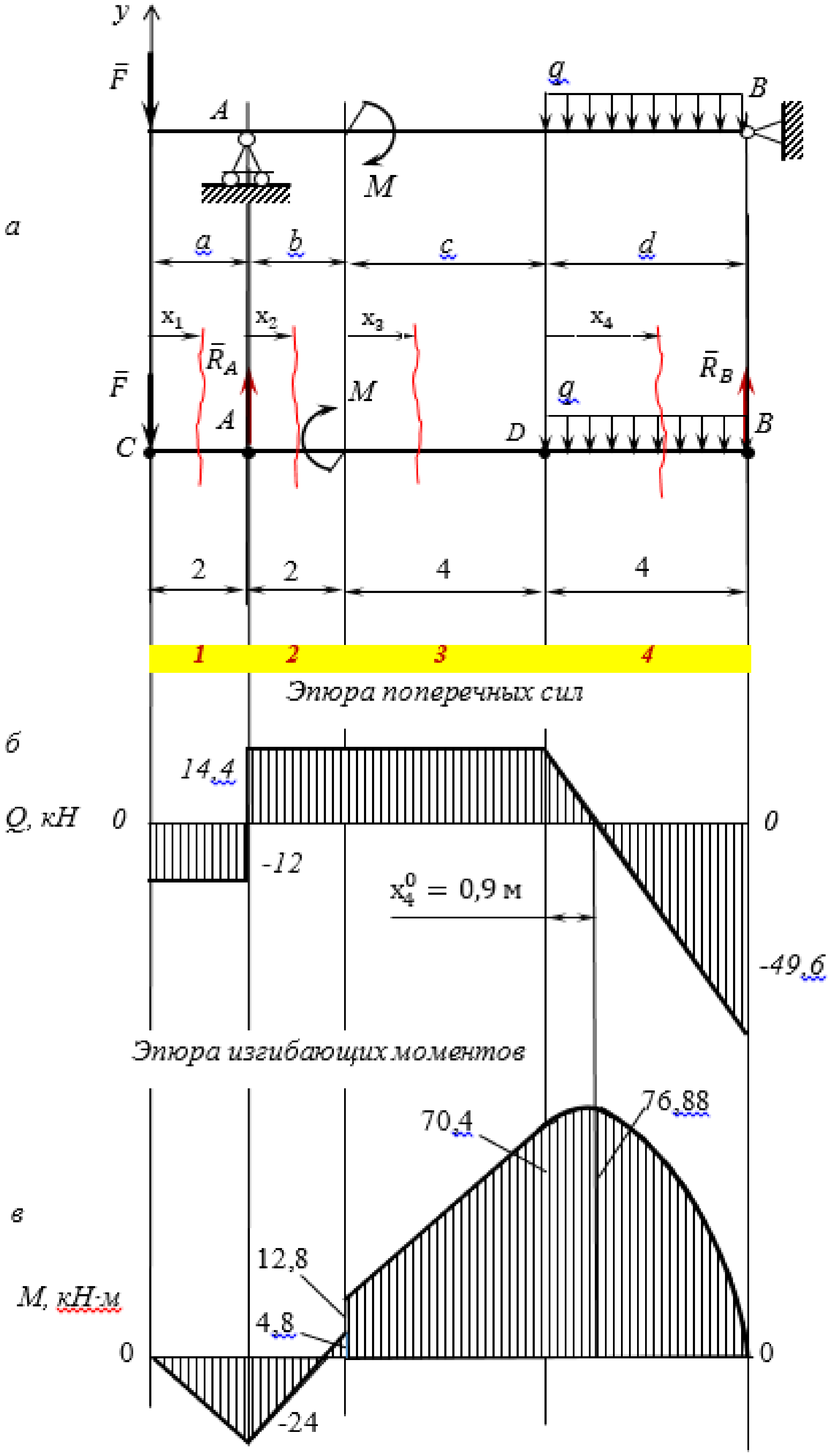

y
F̄
A
M
q
B
а
a
b
c
d
x1
x2
x3
x4
R̄A
R̄B
F̄
M
q
C
A
D
B
2
2
4
4
1
2
3
4
Эпюра поперечных сил
б
14,4
Q, кН
0
0
-12
x40 = 0,9 м
-49,6
Эпюра изгибающих моментов
70,4
76,88
в
12,8
M, кН·м
4,8
0
0
-24

Рисунок 2

3. Запишем уравнения для поперечной силы и изгибающих моментов на участках. Проводим произвольные сечения ***1-1***, ***2-2, 3-3*** и ***4-4.***

На первом участке, отбросив правую часть от сечения, рассмотрим равновесие левой части балки.

Границы сечения ***1-1:*** $0 \leq \text{x}_1 \leq 2$

$$Q_1 = \sum F_{ky} = -F = -12 \text{ (кН)}$$

$$\text{М}_1 = \sum \text{М}(F_k) = -F \cdot \text{x}_1$$

При $\text{x}_1 = 0, \quad \text{М}_1 = -12 \cdot 0 = 0 \text{ (кН)}$

При $\text{x}_1 = 2, \quad \text{М}_1 = -12 \cdot 2 = -24 \text{ (кН)}$

Построим эпюры Q и M на участке ***1-1*** (рис. 1 *б* и *в*).

На втором участке, отбросив правую часть от сечения, рассмотрим равновесие левой части балки.

Границы сечения ***2-2:*** $0 \leq \text{x}_2 \leq 2$

$$Q_2 = \sum F_{ky} = -F + R_A = -12 + 26{,}4 = 14{,}4 \text{ (кН)}$$

$$\text{М}_2 = \sum \text{М}(F_k) = -F \cdot (2 + \text{x}_2) + R_A \cdot \text{x}_2$$

При $\text{x}_2 = 0, \ \text{М}_2 = -F \cdot 2 = -12 \ \cdot 2 = -24 (\text{кН} \cdot \text{м})$

При $\text{x}_2 = 2, \text{М}_2 = -12 \cdot (2 + 2) + 26{,}4 \cdot 2 = 4{,}8 (\text{кН} \cdot \text{м})$

Построим эпюры Q и M на участке ***2-2*** (рис. 1 *б* и *в*).

На третьем участке, отбросив правую часть от сечения, рассмотрим равновесие левой части балки.

Границы сечения ***3-3:*** $0 \leq \text{x}_3 \leq 4$

$$Q_3 = \sum F_{ky} = -F + R_A = -12 + 26{,}4 = 14{,}4 \text{ (кН)}$$

$$\text{М}_3 = \sum \text{М}(F_k) = -F \cdot (2 + 2 + \text{x}_3) + R_A \cdot (2 + \text{x}_3) + M$$

При $\text{x}_3 = 0, \ \text{М}_3 = -12 \cdot (2 + 2) + 26{,}4 \cdot 2 + 8 = 12{,}8 \ (\text{кН} \cdot \text{м})$

При $\text{x}_3 = 4, \text{М}_3 = -12 \cdot (2 + 2 + 4) + 26{,}4 \cdot (2 + 4) + 8 = 70{,}4 \ (\text{кН} \cdot \text{м})$

Построим эпюры Q и M на участке ***3-3*** (рис. 1 *б* и *в*).

На четвертом участке, отбросив правую часть от сечения, рассмотрим равновесие левой части балки.

Границы сечения ***4-4:*** $0 \leq \text{x}_4 \leq 4$

$$Q_4 = \sum F_{ky} = -F + R_A - q \cdot \text{x}_4 = -12 + 26{,}4 - 16 \cdot \text{x}_4$$

При $\text{x}_4 = 0, \ Q_4 = -12 + 26{,}4 = 14{,}4 \ (\text{кН} \cdot \text{м})$

При $\text{x}_4 = 4, \ Q_4 = -12 + 26{,}4 - 16 \cdot 4 = -49{,}6 \ (\text{кН} \cdot \text{м})$

Так как эпюра Q на четвертом участке проходит через нулевое значение, меняя знак с положительного на отрицательный, то в сечении, где $Q = 0$, на эпюре M имеет место максимальное значение. Чтобы найти его, определим значение координаты x_4^0, при котором $Q_4 = 0$.

$$Q_4^0 = -F + R_A - q \cdot x_4^0 = 0$$

$$x_4^0 = \frac{R_A - F}{q} = \frac{26{,}4 - 12}{16} = 0{,}9 \text{ (м)}$$

$$M_4 = \sum M(F_k) = -F \cdot (2 + 2 + 4 + x_4) + R_A \cdot (2+4 + x_4) + M - \frac{q \cdot x_4 \cdot x_4}{2} =$$

$$= -12 \cdot (8 + x_4) + 26{,}4 \cdot (6+x_4) + 8 - \frac{q \cdot (x_4)^2}{2}$$

При $x_4^0 = 0{,}9$ (м)

$$M_4 = -12 \cdot (8 + 0{,}9) + 26{,}4 \cdot (6 + 0{,}9) + 8 - \frac{16 \cdot (0{,}9)^2}{2} = 76{,}88 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$$

При $x_4 = 0,\ M_4 = -12 \cdot 8 + 26{,}4 \cdot 6 + 8 = 70{,}4$ (кН · м)

При $x_4 = 4, M_4 = -12 \cdot (8 + 4) + 26{,}4 \cdot (6 + 4) + 8 - \frac{16 \cdot 4^2}{2} = 0$ (кН · м)

Построим эпюры Q и M на участке ***4-4*** (рис. 1 *б* и *в*).

4. Сечение балки подбираем из условия прочности при изгибе

$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \leq [\sigma]$, откуда

$$W_x \geq \frac{|M_{max}|}{[\sigma]} = \frac{76{,}88 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0{,}00048 \text{ (м}^3\text{)} = 4{,}8 \cdot 10^{-4} \text{(м}^3\text{)}$$

Принимаем $h = 2b$, тогда для прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}$$

$$b = \sqrt[2]{\frac{3 \cdot W_x}{2}} = \sqrt[2]{\frac{3 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-4}}{2}} = 0{,}0896 = 0{,}09 \text{ (м)}$$

Тогда $h = 2 \cdot 0{,}09 = 0{,}18$ (м).